

**Full Length Research Paper**

Influence des nombres de Reynolds et de Froude sur l'écoulement dans une conduite à géométrie curviligne - Application à l'écoulement dans le cathéter ventriculaire installé sur les hydrocéphales

Rokhiya Dia^{1,*}, Cheikh Birahim Ndao², Cheikh Mbow², and Momar Codé Ba³¹*UFR SI, Université Iba Der Thiam, Thiès, Sénégal*²*Departement de Physique, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal*³*Faculté de Médecine, Université Cheikh Anta Diop/Service de Neurochirurgie CHU Fann, Dakar, Sénégal**Received June 2025 – Accepted October 2025***Corresponding author. rokhiya.dia@gmail.com*

Author(s) agree that this article remain permanently open access under the terms of the Creative Commons Attribution License 4.0 International License.

Résumé:

Nous proposons l'étude de l'écoulement du Liquide Cérébro-Spinal (LCS) dans un quart de tore positionné verticalement, en partant des équations de Navier-Stokes. Compte tenue de la forme curviligne de la géométrie étudiée, ces équations formulées dans le système de coordonnées cartésiennes seront très complexes à résoudre, aussi bien du point de vu théorique que numérique. La démarche choisie ici est donc de transformer les équations du mouvement, pour ramener le domaine curviligne en un domaine rectangulaire représenté par le système de coordonnées toriques. Afin de généraliser le problème et de générer les paramètres de contrôle, les équations conservatives sont mises sous forme adimensionnelles et complétées par les conditions initiales et aux limites. Le système d'équations obtenu est fermé mais est fortement non-linéaire, donc le choix d'une technique de résolution numérique s'impose. L'algorithme de résolution numérique choisi est basé sur une discrétisation spatiale par différences finies, et une méthode de type projection-correction permettant le calcul découpé du champ de vitesse et celui du champ de pression. Les champs de vitesse sont présentés et analysés pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et du nombre de Froude.

Mots clés : Équations de Navier-Stokes, Géométrie curviligne, Hydrocéphalie, Dérivation Ventriculo-Péritonéale, Liquide Cérébro-Spinal.**Cite this article:**

Rokhiya Dia, Cheikh Birahim Ndao, Cheikh Mbow, and Momar Codé Ba, (2025). Influence des nombres de Reynolds et de Froude sur l'écoulement dans une conduite à géométrie curviligne - Application à l'écoulement dans le cathéter ventriculaire installé sur les hydrocéphales. Revue RAMReS – Sci. Appl. & de l'Ing., Vol. 7(1), pp. 34-39. ISSN 2630-1164.

1. Introduction

L'hydrocéphalie est un désordre de l'hydrodynamique du Liquide Cérébro-Spinal (LCS) dans les ventricules. Cette condition, très fréquente chez les enfants issus de milieux sociaux défavorisés, si elle n'est pas traitée conduit à une augmentation de la Pression IntraCranienne puis à une expansion du crâne. Ce qui peut induire des dommages au cerveau ou même entraîner la mort. La solution la plus courante adoptée

par les neurochirurgiens pour traiter l'hydrocéphalie est de drainer de manière sécuritaire l'excès du LCS des ventricules vers la cavité péritonéale grâce à un appareil de dérivation ventriculo-péritonéale (DVP) [1–3]. Mais plusieurs défaillances mécaniques de la DVP qui nécessitent des révisions chirurgicales sont notées durant les deux premières années post-opératives (environ 50% les deux premières années et 100% dans les dix années après l'implantation). Ces

défaillances sont le plus souvent causées par des problèmes de fonctionnement de la valve qui avec le cathéter ventriculaire et le cathéter péritonéal, constitue l'une des composantes de la DVP [2, 4, 5]. La conséquence pour les patients, leurs familles et le neurochirurgien constitue un énorme impact social, économique et médical, avec en plus 100 000 nouveaux cas d'hydrocéphalie estimés par année en Afrique Sub-Saharienne [6–9].

Depuis le premier appareil de dérivation implantée plus de soixante-dix ans plus tôt, très peu de progrès techniques ont été notés sur les nouveaux appareils. Ces dernières décennies, plusieurs études sur la conception d'une nouvelle génération de valves intelligentes ont été menées. Mais les solutions proposées par les chercheurs et les fabricants sont très couteuses à implémenter et non ergonomiques alors que les dérèglements de la valve sont d'origine hydrodynamiques. Et malgré les avancées enregistrées en neurochirurgie, la dérivation par valve reste le traitement de choix pour environ 80% des patients. Aschoff *et al.* [2] avancent que le principal facteur de dysfonctionnement de l'appareil de dérivation qui est du à sa mal disposition, surtout au niveau du cathéter ventriculaire, est très peu documenté. Et que ces dysfonctionnements sont rarement compris comme étant des échecs chirurgicaux. Les différents types de valve disponibles sur le marché (environ 200), présentent des problèmes de fonctionnements hydrauliques que le patient soit en position debout ou en position couché, et au mieux admettent un compromis pour fonctionner quelque soit la posture.

Notre objectif est de montrer que les dérèglements de la valve sont d'origine purement hydrodynamique et que l'écoulement en sortie de cathéter peut être maîtrisé, en développant un modèle théorique et numérique de l'écoulement en amont de la valve. Ce papier va se concentrer sur l'influence qu'on les paramètres physiques comme le nombre de Reynolds et le nombre de Froude sur la topologie de cet écoulement. Ensuite les cas de figure où les vitesses en sortie de cathéter sont modérées seront repérés.

2. Matériels et méthodes

Dans cette section, la méthode de modélisation théorique adoptée, et la justification de ce choix basé sur la physique du problème, qui nous a permis d'établir nos modèles d'équations toriques seront présentées. Et du fait de la forte non-linéarité des équations de Navier-Stokes qui décrivent le mouvement, et de la difficulté à modéliser le terme de gradient pression, l'alternative à un choix de résolution analytique est une approche par approximation numérique. Notons que notre application est dans le domaine médical ici et donc la pression représentant une variable fondamentale, ne pourra être ignorée tel que c'est parfois le cas en mécanique des fluides par l'adoption de la méthode de vorticité-fonction de courant par exemple. Donc des méthodes de discréétisation temporelle et de discréétisation spatiale

ont été investiguées afin d'adopter celles les plus convenables pour l'approximation de nos équations. Le terme temporel pourra être discréétisé grâce une méthode prédicteur-correcteur. Le choix de ces méthodes de discréétisation numériques sera brièvement abordé à la fin de cette section.

2.1. Les équations du mouvement en variables primitives

Du théorème de transport, est déduit la forme naturelle des équations de l'écoulement qui sont des équations sous forme conservative. Et dans le cas de l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien à propriétés physiques constantes qui nous intéresse dans notre étude, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \operatorname{div}(\bar{v} \otimes \rho \bar{v}) = -\operatorname{grad}p + \rho \bar{g} + \mu \Delta \bar{v} \quad [\text{Eq. 1}]$$

\bar{g} représente la gravité et Δ est l'opérateur laplacien. Nous avons quatre inconnues qui sont les trois composantes du champ de vitesse \bar{v} et la pression p et trois équations pour chaque ligne de coordonnées dans une représentation trois dimensions. Si la masse volumique du fluide est supposée constante, ces équations seront alors complétées par l'équation de continuité sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad [\text{Eq. 2}]$$

Ces équations du mouvement sous forme vectorielle sont fermées par les conditions aux limites et initiales et sont valables quelque soit le système de coordonnées choisi, mais c'est la géométrie du cathéter ventriculaire va nous renseigner sur le système de coordonnées le mieux adapté pour la formulation théorique des équations notre problème.

2.2. Géométrie du cathéter ventriculaire

La zone de l'écoulement qui nous intéresse pour notre étude se déroule dans le cathéter ventriculaire, c'est-à-dire de l'entrée du fluide cérébro-spinal dans le système de dérivation jusqu'à la valve (figure 1). La forme géométrique de cette partie est curviligne et est similaire à celle d'une portion de tore. Nous expliquerons donc le choix du système de coordonnées toriques plutôt que le système usuel de coordonnées cartésiennes, et aussi la technique de transformation qui nous a permis de générer cette géométrie torique. La forme des équations, imposée par le profil curviligne du cathéter, nous a conduit à choisir des techniques analytiques adaptées qui nous permettent d'éviter de grandes difficultés pour les formulations théorique et numérique, comme par exemple la paroi du cathéter qui dans ce cas pourra coïncider avec une des surfaces de coordonnées. Les équations du mouvement adimensionnalisées pourront être exprimées dans le nouveau système de coordonnées

toriques après avoir défini les vecteurs de base et la métrique de l'espace.

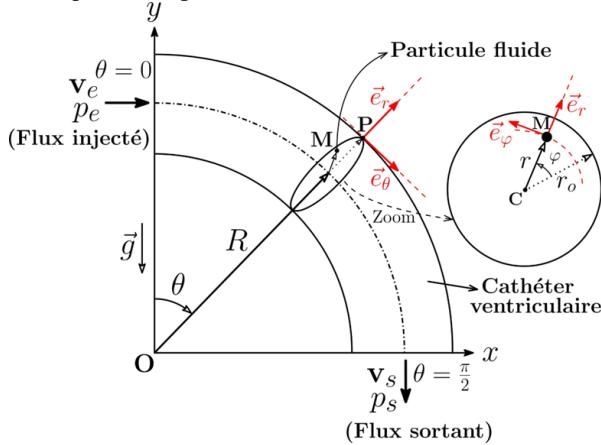


Figure 1: Géométrie du cathéter ventriculaire. Position debout du patient (gauche) et coupe d'une section droite du cathéter (droite).

Notre géométrie est visiblement de type curviligne et l'écriture de notre problème à l'intérieur de notre domaine d'étude dans le système de coordonnées cartésiennes sera simple, mais posera des difficultés à plusieurs niveaux. Comme la difficulté à paramétriser simplement l'équation de la paroi et celle de bien poser les conditions aux limites du problème au niveau de la paroi mais aussi le problème du maillage aux frontières. Ces contraintes, imposées par un domaine aux frontières courbes, peuvent être évitées en optant pour le domaine rectangulaire du système de coordonnées torique obtenu après transformation des coordonnées.

2.3. Formulations des équations de l'écoulement dans le cathéter ventriculaire

Nous nous intéressons à la transformation conforme suivante qui vérifie que les conditions de Cauchy-Riemann et permet de faire coïncider les frontières courbes de notre problème avec une ou plusieurs lignes de coordonnées [10] :

$$\begin{cases} x = f_1(r, \varphi) \sin \theta \\ y = f_1(r, \varphi) \cos \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad [\text{Eq. 3}]$$

(r, Θ, φ) représente le système de coordonnées thoriques, et $f_1(r, \varphi)$ est la fonction primitive génératrice de l'espace où se déroule l'écoulement :

$$f_1(r, \varphi) = R + r \cos \varphi$$

Les équations du mouvement sont exprimées sous une forme générale et conservative dans un système orthogonal de coordonnées curvilignes, avant d'être formulées dans le cas particulier du système de coordonnées toriques. Le problème est généralisé en réduisant le nombre de ses paramètres grâce à une

étude adimensionnelle qui fournit des équations sans unités. On arrive finalement aux équations suivantes avec toutes les grandeurs physiques qui sont normées :

$$\nabla_i v_i = 0 \quad [\text{Eq. 4}]$$

$$\frac{\partial v^k}{\partial t} + \left[\frac{\partial T^{jk}}{\partial x^j} + T^{jk} \Gamma_{ji}^i + T^{im} \Gamma_{mi}^k \right] = S^k \quad [\text{Eq. 5}]$$

Avec S^k le terme source qui comprend les termes de gradient de pression et de gravité. Et le tenseur T^{ij} qui comporte les flux de diffusion et d'advection de l'écoulement. La condition initiale et les conditions aux limites sur la vitesse et la pression données par :

$$\begin{cases} v = 0 \\ p = cste = p_0 \end{cases}$$

- Conditions initiales : $v(r, \theta = 0) = v_e$
- A l'entrée : $p(r, \theta = 0) = p_e$

- Sur la Paroi : $\begin{cases} v(r = r_0, \theta) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{r_0} = -\frac{1}{EuFr^2} g^k n_k \end{cases}$

2.4. Méthodes d'approximation numériques choisies

En pratique, le découplage entre le champ de vitesse et le champ de pression est résolu par une méthode à pas fractionnaire ou encore une méthode prédicteur-correcteur [11, 12]. Pour cette discréttisation temporelle l'équation 1 se met sous la forme d'une équation de type Cauchy suivante :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = F(\bar{v}) \quad [\text{Eq. 6}]$$

Avec $F(\bar{v})$ qui comprend le reste des termes. Cette équation est résolue en deux étapes en utilisant le schéma de Adams-Bashforth. Dans la première étape, celle de prédiction, une vitesse intermédiaire est introduite à chaque pas de temps ne satisfaisant pas à la contrainte d'incompressibilité. Cette vitesse n'a pas de sens physique et vérifie les conditions aux limites du problème de Navier-Stokes. Le terme de $\bar{\nabla} p$ sera ignoré pendant cette étape. La seconde étape qui est l'étape de projection consiste à corriger la vitesse en la projetant sur l'espace des champs à divergence nulle. C'est-à-dire que la pression sera utilisée pour projeter la vitesse intermédiaire sur un espace où le champ de vitesse ne dépend pas de l'équation de continuité, afin d'obtenir les champs de vitesse et de pression au temps de calcul. La pression agit comme un terme correcteur et la contrainte d'incompressibilité est réalisée à cette étape. La discréttisation spatiale des termes de l'équation 5 est réalisée en utilisant la méthode des

différences finies et un algorithme de résolution itératif a permis de résoudre le schéma numérique obtenu.

3. Résultats

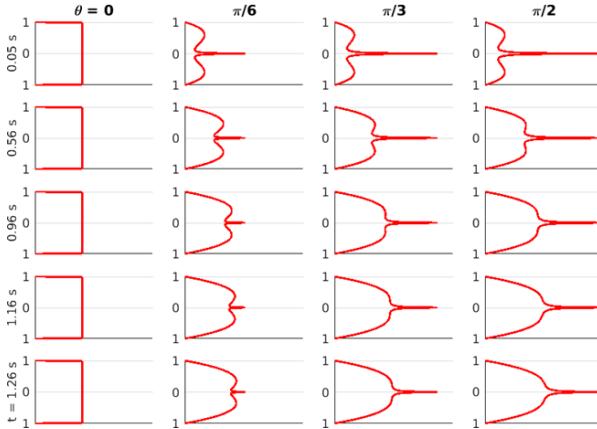


Figure 2: Évolution du profil de vitesse dans le temps pour différentes positions dans le cathéter ventriculaire pour $Re = 0.5$ et $Fr = 0.05$.

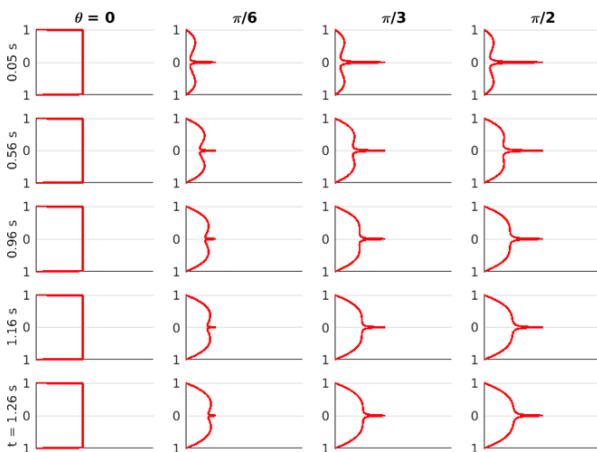


Figure 3: Évolution du profil de vitesse dans le temps pour différentes positions dans le cathéter ventriculaire pour $Re = 0.5$ et $Fr = 0.1$.

Pour nos simulations, un profil de vitesse carré est injecté à l'entrée de la conduite (paroi supposée rigide) en $\theta = 0$. On considère une coupe en $\varphi = 0$ dans la partie supérieure par rapport à l'axe de la conduite et une autre coupe en $\varphi = \pi$ dans la partie inférieure. La ligne de coordonnée e_r varie de 0 à $r_0 = 1$. Pour un facteur de forme $R/r_0 = 100$ fixé et deux valeurs de Re , nous avons regardé l'effet de Fr sur les résultats en respectant certains critères de paramètres de simulation pour notre application médicale. Regardons alors l'évolution de ce profil carré dans le temps pour différentes positions dans un microcanal dans un repère local. Pour notre application médicale les écoulements sont très rampants, donc les valeurs de Re qui nous intéressent sont très faibles (de l'ordre de au plus 1), et de trop grandes vitesses risquent d'entraîner des coefficients de frottement importants, ou bien dans le cas d'une paroi flexible, des amplitudes de vibrations

élevées. Ce qui a comme effets indésirables l'accélération de l'usure et aussi des risques de sensation de douleur dans le corps. Nous allons repérer quelles sont les valeurs de Fr à prendre en compte pour maîtriser l'écoulement à la sortie de la conduite qui subit fortement l'effet de la pesanteur.

Quand on rentre dans la conduite avec un profil de vitesse carré, donc une vitesse constante partout sauf à la paroi où la vitesse est nulle, les effets de viscosité au niveau de la paroi entraînent de fort gradient de vitesse au voisinage de la paroi. Les effets de dissipation sont importants à ce niveau. Et puisqu'on a des gradients positifs dans cette zone, nous aurons une compensation d'un autre côté. Cette compensation ne peut se faire qu'au cœur de l'écoulement, avec des gradients négatifs proche de l'axe et une vitesse élevée sur l'axe. Cette analyse se fait surtout dans les premiers temps de calcul pendant le régime transitoire où l'écoulement n'a pas encore eu le temps de s'organiser (les deux premières lignes de profil sur chaque planche : figures 2-5). Mais quand on laisse assez de temps au système de s'organiser, donc aux derniers temps de calcul, le régime devient établi avec les effets d'entrée qui s'estompent. Par exemple, on voit les effets de gradient de vitesse négatifs s'atténuer. Mais si dans les derniers temps de calculs, ces effets persistent, on doit regarder plus attentivement les facteurs qui les minimisent.

Pour un $Re = 0.5$ et un $Fr = 0.1$ (figure 3), la longueur d'entrée peut aller jusqu'à environ $\pi/3$ de l'entrée au temps de calcul 0.5 s, donc plus proche de la sortie du cathéter. L'amplitude des vitesses devient également plus importante à partir de $\theta = \pi/3$ où l'écoulement est régi par la pesanteur. Alors que proche de l'entrée, la pression est l'unique moteur du mouvement comme dans le cas de l'écoulement dans une conduite droite horizontale. Pour une même valeur du nombre de Reynolds mais une valeur du nombre de Froude de moitié (figure 2), les effets de pesanteur sont dix fois plus importants que les effets de viscosité dans l'écoulement. Les forts gradients de vitesse proche de la paroi et les effets de dissipation s'atténuent, ainsi que le fluide qui avait ralenti au voisinage de l'axe de la conduite pour respecter la condition de débit. Donc ici une longueur d'entrée un peu plus réduite pour un nombre de Froude plus faible. D'autres tests réalisés et non présentés dans ce papier montrent pour un nombre de Reynolds de 0.5 le nombre de Froude minimal critique est autour de 0.035, où les effets de pesanteur dominent dans l'écoulement qui s'emballe.

Si on considère un nombre de Reynolds plus grand, $Re = 1$ (figure 4) les effets de convection sont équivalents aux effets de diffusion dans l'écoulement. Pour $Fr = 0.05$, le régime transitoire se déroule plus rapidement avec une longueur d'entrée de conduite moins importante ($\pi/6$ aux grands temps de calcul). Si la gravité devient plus importante comparée aux effets convectifs avec $Fr = 0.1$ (figure 5), l'amplitude de la vitesse augmente avec une longueur d'entrée toujours minimale. Donc la longueur d'entrée peut être minimisée en considérant des Re pas trop faibles, sinon la sensibilité de l'écoulement à la pesanteur dans la

zone proche de la sortie du cathéter sera encore plus importante. Dans ce cas, le nombre de Froude ne doit pas aller en deçà d'une valeur critique.

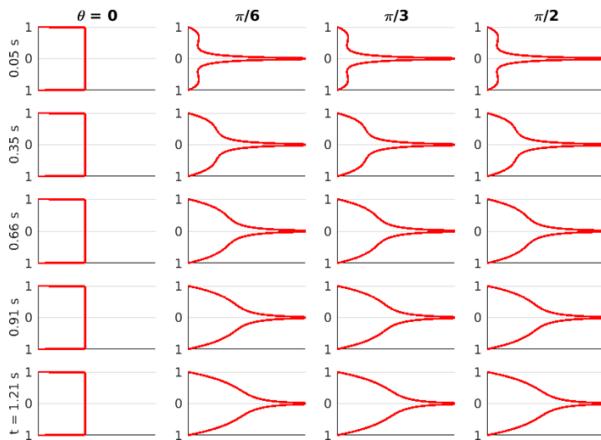


Figure 4: Évolution du profil de vitesse dans le temps pour différentes positions dans le cathéter ventriculaire pour $Re = 1$ et $Fr = 0.05$.

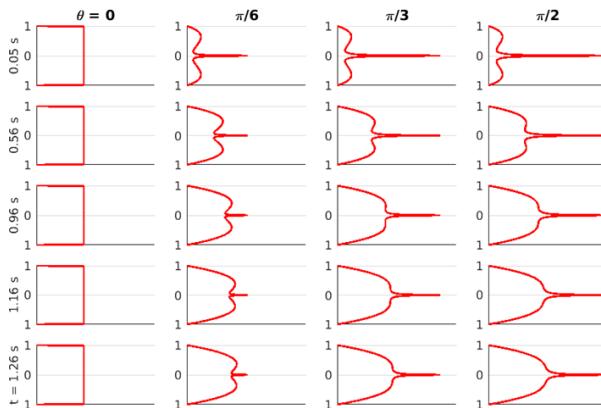


Figure 5: Évolution du profil de vitesse dans le temps pour différentes positions dans le cathéter ventriculaire pour $Re = 1$ et $Fr = 0.1$.

4. Conclusion et perspectives

Dans ce papier, des résultats sur les effets de la variation des nombres de Reynolds et de Froude sur l'écoulement dans le cathéter ventriculaire d'une DVP ont été présentés et analysés. Les types d'écoulement étudiés sont très rampants dans une conduite déformée. Dans ce cas le paramètre physique le plus important à étudier devient le nombre de Froude, car il s'agit de comparer les effets de pesanteur aux effets de diffusion dans l'écoulement. Après avoir repéré le régime établi de l'écoulement où le profil carré tend vers un profil parabolique, les critères sur la valeur minimale de Fr pour des Re faibles doivent être formulés pour éviter l'emballage de l'écoulement à la sortie causé par la gravité. Par exemple pour $Re = 0.5$, on s'approche du régime critique dans la partie proche de la sortie du cathéter quand Fr est 10 fois plus petit que Re. Alors que proche de l'entrée du cathéter, c'est la pression qui est le moteur du mouvement.

Nous avons pu mettre une place un formalisme théorique et un code de calcul qui peuvent être utilisés dans plusieurs domaines d'ingénierie, où on retrouve l'interaction entre un écoulement de fluide avec des géométries curvilignes (mécanique, hydraulique, chimique,...).

Mais en réalité nous avons une paroi souple et extensible qui subit une force de la part du fluide et qui en retour réagit sur ce dernier. Donc au lieu d'étudier uniquement le problème hydrodynamique comme c'est notre cas, il faudra regarder le couplage avec l'équation de déformation de la paroi, soit les effets de gradients transversaux des vitesses sur la dynamique de la paroi. Dans ce cas le problème sera encore plus sensible aux amplitudes de vitesse élevées. D'un autre côté, un profil type fonction périodique avec un écoulement à l'entrée pulsé et un fluide LCS réel peuvent être testés, avec des modèles pilotés par l'Intelligence Artificielle disponibles. D'autres types d'appareil de DVP avec cathéter ventriculaire perforé, conduite à section ellipsoïde et valves intelligents seront étudiés pour la suite de ce projet.

Remerciements

Nous remercions **The l'ORÉAL-UNESCO For Women in Science Sub-Saharan Africa 2016 Award** et le **Projet d'Appui à la Promotion des chercheuses et des Enseignantes-chercheures du Sénégal (PAPES)** pour leur soutien et leurs encouragements accordés à ce travail. Merci à Dr. El Hadji Mamadou Keita pour son aide lors de la mise en forme de ce document.

REFERENCES

- [1] J. F. X. Naradzay, B. J. Browne, M. A. Rolnick, and R. J. Doherty. "Cerebral ventricular shunts". In: *The Journal of Emergency Medicine* 17.2 (1999), pp. 311–322.
- [2] A. Aschoff, P. Kremer, B. Hashemi, and S. Kunze. "The scientific history of hydrocephalus and its treatment". In: *Neurosurgical Review* 22.2-3 (1999), pp. 67–93.
- [3] H. L. Rekate. "A Contemporary Definition and Classification of Hydrocephalus". In: *Seminars in Pediatric Neurology* 16.1 (2009). What Happens When Pediatric Neurosurgery Patients Grow Up?, pp. 9–15.
- [4] S. R. Browd, O. N. Gottfried, B. T. Ragel, and J. R. W. Kestle. "Failure of Cerebrospinal Fluid Shunts: Part I: Obstruction and Mechanical Failure". In: *Pediatric Neurology* 34.2 (2006), pp. 83– 92.
- [5] S. R. Browd, O. N. Gottfried, B. T. Ragel, and J. R. W. Kestle. "Failure of Cerebrospinal Fluid Shunts: Part II: Overdrainage, Loculation, and Abdominal Complications". In: *Pediatric Neurology* 34.3 (2006), pp. 171–176.
- [6] D. Wilburn. "Outcome Research in Hydrocephalus Treatment". In: *Cases on Health Outcomes and Clinical Data Mining: Studies and Frameworks*. 1st. Premier Reference Source. Medical Information Science Reference, 2010. Chap. 11, pp. 225–243.
- [7] C. N. Shannon, T. D. Simon, G. T. Reed, et al. "The economic impact of ventriculoperitoneal shunt failure". In: *Journal of Neurosurgery: Pediatrics* 8.6 (2011), pp. 593–599.
- [8] A. El Khamlichi. "African neurosurgery: current situation, priorities, and needs". In: *Neurosurgery* 48.6 (2001), pp. 1344–1347.

-
- [9] B. C. Warf. "Growing Brains: How Adapting to Africa Advanced the Treatment of Infant Hydrocephalus". In: *Neurosurgery* 64.CN_suppl_1 (2017), pp. 37–39.
 - [10] P. H. Moon and D. E. Spencer. "Coordinates systems". In: *Field Theory for Engineers*. Van Nostrand Series in Electronics and Communications. Van Nostrand, 1961. Chap. 12, pp. 332–358.
 - [11] A. J. Chorin. "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems". In: *Journal of Computational Physics* 2.1 (1967), pp. 12–26.
 - [12] R. Temam. "Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes". In: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 96 (1968), pp. 115–152.